Einführung in die Logik - Vorkurs

mathematische Grundlagen der Modelltheorie: Mengen, Relationen, Funktionen

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

Ein **Modell** ist ein künstlich geschaffenes Objekt, das die Struktur eines untersuchten Objekts in vereinfachter Form nachbildet. Die Eigenschaften der Elemente im Modell und die Beziehungen zwischen diesen müssen denen im untersuchten Objekt analog bzw. ähnlich sein.

- Modelle spezifizieren
  - Diskursuniversum/Domäne/Individuenbereich D *(a.: U)*
  - Eigenschaften der Elemente aus D
  - Relationen zwischen den Elementen aus D
    - **mathematische Grundlagen: Mengen- und Funktionentheorie**

Mathematische Grundlagen: Mengentheorie

Georg Cantor (1845-1918):

Eine **Menge** ist eine „Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.“

Elementbeziehungen

– Objekt a ist Element der Menge M: $a \in M$
– Objekt a ist nicht Element der Menge M: $a \notin M$

Definition von Mengen durch

– Aufzählung {4, 6, 8, 10, 12}
– Eigenschaften {x | x ist eine gerade natürliche Zahl größer 3 und kleiner 13}

Mathematische Grundlagen: Mengentheorie

Identität von Mengen

– {4, 6, 8, 10, 12} = {12, 8, 4, 10, 6} = {8, 4, 4, 6, 8, 10, 12, 10}

Kardinalität von Mengen | M |

– |{4, 6, 8, 10, 12}| = 5

Teilmengen

– M ist eine Teilmenge von M2 ($M1 \subseteq M2$) gdw. jedes Element von M1 auch Element von M2 ist.
  - echte Teilmengen: $M1 \subset M2$
– Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge.
– Die Potenzmenge von M, $\wp(M)$, ist die Menge aller Teilmengen von M.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Mathematische Grundlagen: Mengentheorie

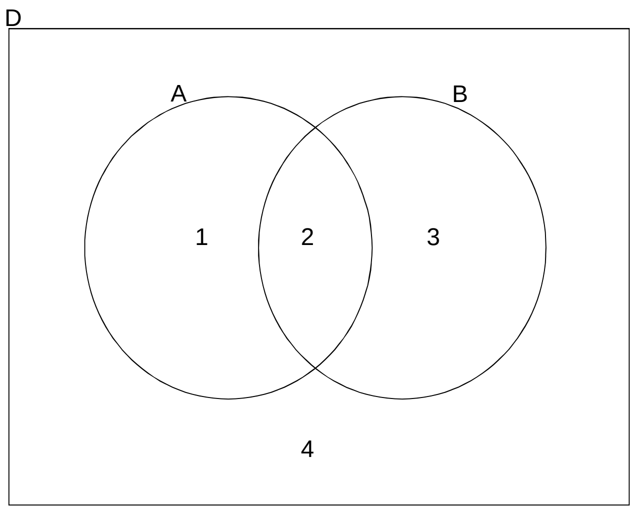
Operationen auf Mengen

- Vereinigung: $M1 \cup M2$ =def $\{x: x \in M1 \text{ oder } x \in M2\}$
- Schnitt: $M1 \cap M2$ =def $\{x: x \in M1 \text{ und } x \in M2\}$
- Differenz: $M1 - M2$ =def $\{x: x \in M1 \text{ und } x \notin M2\}$
- Komplement: M‘ =def $\{x: x \notin M\}$ bzw. M‘ = D - M

► D: *Domäne, Diskursuniversum, Universe of Discourse*

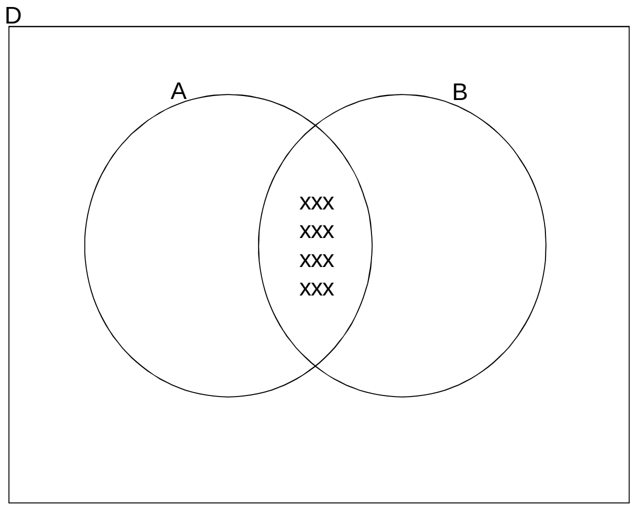
➢ Mengentheoretische Operationen können graphisch durch **Venn-Diagramme** dargestellt werden (Kreis-/Ellipsen-Diagramme nach John Venn (1834-1923); vgl. Eulersche Kreise nach Leonhard Euler (1707-1783))

Venn-Diagramme: Grundstruktur

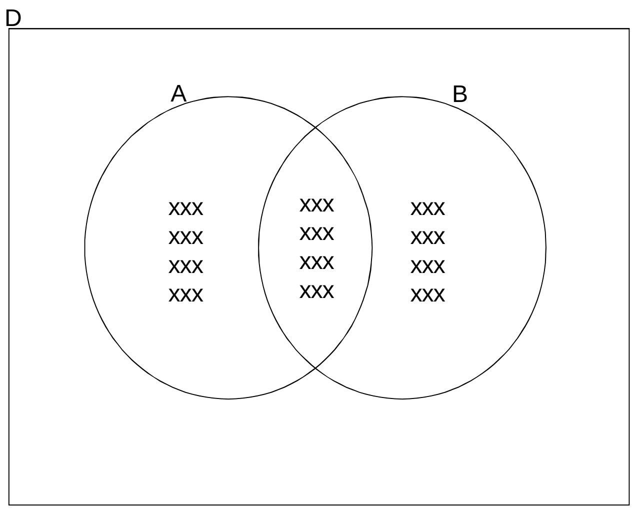


1: in A, aber nicht in B
2: in A und in B
3: in B, aber nicht in A
4: weder in A noch in B

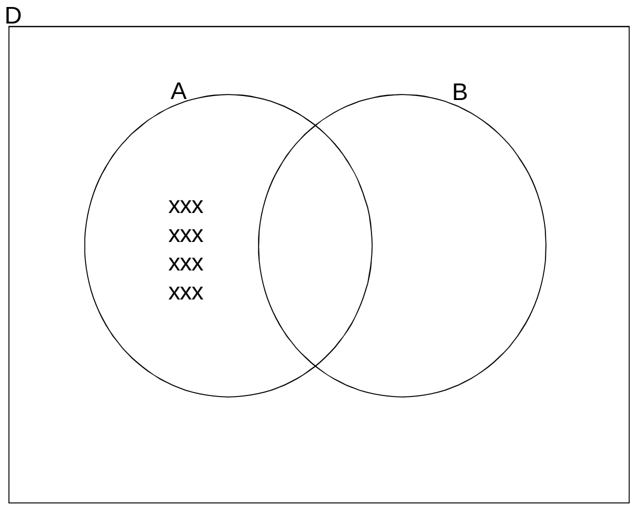
Venn-Diagramme: $A \cap B$



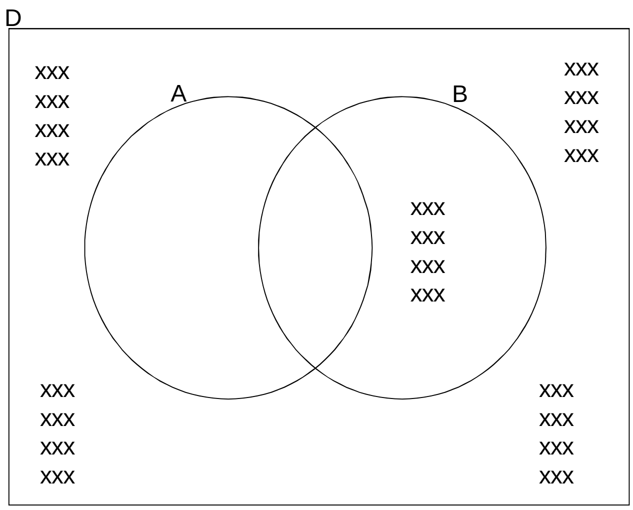
Venn-Diagramme: $A \cup B$



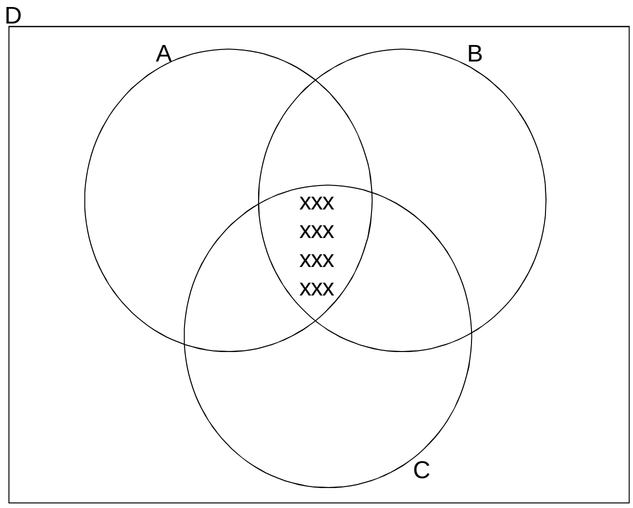
Venn-Diagramme: A - B



Venn-Diagramme: A'



Venn-Diagramme: (A ∩ B) ∩ C bzw. A ∩ (B ∩ C)



Mathematische Grundlagen: Mengentheorie

wichtige Mengentheoretische Gesetze - 1

- Idempotenz-Gesetze
  - $X \cup X \quad = \quad X$
  - $X \cap X \quad = \quad X$
- Kommutativ-Gesetze
  - $X \cup Y \quad = \quad Y \cup X$
  - $X \cap Y \quad = \quad Y \cap X$
- Assoziativ-Gesetze
  - $(X \cup Y) \cup Z \quad = \quad X \cup (Y \cup Z)$
  - $(X \cap Y) \cap Z \quad = \quad X \cap (Y \cap Z)$

Mathematische Grundlagen: Mengentheorie

wichtige Mengentheoretische Gesetze - 2

- Distributiv-Gesetze
  - $X \cup (Y \cap Z) \quad = \quad (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
  - $X \cap (Y \cup Z) \quad = \quad (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

- Identitäts-Gesetze
  - $X \cup \varnothing \quad = \quad X$
  - $X \cup U \quad = \quad U$
  - $X \cap \varnothing \quad = \quad \varnothing$
  - $X \cap U \quad = \quad X$

Mathematische Grundlagen: Mengentheorie

wichtige Mengentheoretische Gesetze - 3

- Komplement-Gesetze
  - $X \cup X' \quad = \quad U$
  - $(X')' \quad = \quad X$
  - $X \cap X' \quad = \quad \varnothing$
  - $X - Y \quad = \quad X \cap Y'$

- De Morgan'sche Gesetze
  - $(X \cup Y)' \quad = \quad X' \cap Y'$
  - $(X \cap Y)' \quad = \quad X' \cup Y'$

Mathematische Grundlagen: Relationen

geordnete Paare	<a, b>
Folgen	<a, b, c, d, ...>
Cartesische Produkte	$M1 \times M2$ =def $\{<x, y> \mid x \in M1 \text{ und } y \in M2\}$
Relationen	Eine binäre Relation R von der Menge M1 in die Menge M2 ist eine Teilmenge von $M1 \times M2$.

- Wenn das Paar <x, y> Element von R ist, sagt man, dass R auf <x, y> zutrifft oder das x zu y in der Relation R steht.
  - M1: Vorbereich, Definitionsbereich von R (domain)
  - M2: Nachbereich, Wertebereich von R (range)
    - n-stellige Relationen: analog

Eigenschaften von Relationen

Eine Relation R in einer algebraischen Stuktur <A, R> ist ... gdw. ...

reflexiv	$\forall a \in A\ R(a, a)$
irreflexiv	$\forall a \in A\ \neg R(a, a)$
transitiv	$\forall a,b,c \in A\ (R(a, b) \wedge R(b, c) \rightarrow R(a, c))$
intransitiv	$\forall a,b,c \in A\ (R(a, b) \wedge R(b, c) \rightarrow \neg R(a, c))$
symmetrisch	$\forall a,b \in A\ (R(a, b) \rightarrow R(b, a))$
asymmetrisch	$\forall a,b \in A\ (R(a, b) \rightarrow \neg R(b, a))$
antisymmetrisch	$\forall a,b \in A\ (R(a, b) \wedge R(b, a) \rightarrow a = b)$
verbunden (connex)	$\forall a,b \in A\ (R(a, b) \vee R(b, a) \vee a = b)$
unverbunden	$\neg\forall a,b \in A\ (R(a, b) \vee R(b, a) \vee a = b)$
eine Äquivalenzrelation	reflexiv + transitiv + symmetrisch

Eigenschaften von Relationen: Beispiele

Beispiele: Die Relation ... ist ...

a ist mindestens so schwer wie b	reflexiv + transitiv
a ist Vater von b	irreflexiv + intransitiv + asymmetrisch + unverbunden
Zahl a ist größer als Zahl b	irreflexiv + transitiv + asymmetrisch + verbunden
a ist genauso alt wie b	reflexiv + transitiv + symmetrisch (= Äquivalenzrelation) + unverbunden
Menge a ist eine unechte Teilmenge von Menge b	reflexiv + transitiv + antisymmetrisch + unverbunden

Ordnungsrelationen

Ordnung:

- binäre Relation über einer algebraischen Struktur <A, R>, die
  - transitiv und
    - reflexiv und antisymmetrisch
      - ➢ schwache Ordnung oder
    - irreflexiv und asymmetrisch
      - ➢ starke Ordnung (strikte Ordnung) ist.

R ist eine ...	*gdw. R ... ist*	*Beispiel*
(schwache) partielle Ordnung [Halbordnung]	reflexiv + transitiv + antisymmetrisch	Menge a ist eine unechte Teilmenge von Menge b
strikte partielle Ordnung [Halbordnung]	irreflexiv + transitiv (+ asymmetrisch) (*)	Menge a ist eine echte Teilmenge von Menge b
strikte totale Ordnung [lineare Ordnung]	SPO + verbunden	Zahl a ist größer als Zahl b
Äquivalenzrelation	reflexiv + transitiv + symmetrisch	a ist genauso alt wie b

(*) SPOs können wahlweise (äquivalent) als tr + irr, tr + asymm oder tr + irr + asymm definiert werden

Äquivalenzrelationen

Definition:

$R \subseteq M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Eine Äquivalenzrelation teilt eine Menge in *Äquivalenzklassen* (disjunkte Teilmengen, deren Vereinigung die Menge ist) ein.

Beispiel 1:

Sei M die Menge aller deutschen Wörter. Die Relation

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ und } b \text{ fangen mit dem gleichen Buchstaben an}\}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 2:

a ist genauso alt / groß / schnell / klug ... wie b

Inverse Relationen und Komplemente von Relationen

Die *inverse Relation* R^{-1} entsteht durch Vertauschung von Definitions- und Wertebereich und der Tupelelemente:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Davon wohl zu unterscheiden ist das *Komplement* einer Relation $R \subseteq M \times N$, nämlich $\bar{R} = (M \times N) \setminus R$.

Beispiel 1:

$M = \{1, 2, 3\}$, $R \subset M \times M$. Relation "ist kleiner als" ist $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. $\bar{R}$ ist dann "ist nicht kleiner als" oder "ist größer oder gleich", R^{-1} "ist größer als".

Beispiel 2:

Die Relation R, "ist Ehemann von" mit Männern als Definitionsbereich. $\bar{R}$ ist die Relation "ist nicht verheiratet mit", R^{-1} ist dagegen "ist Ehefrau von" auf der Menge der Frauen.

Relationen: Hüllen

Allgemein:

Man bildet die *Hülle* einer Relation R, um sicherzustellen, dass bestimmte Eigenschaften auf R zutreffen (z.B. Reflexivität, Transitivität). Dazu fügt man R weitere Tupel hinzu, bis die gewünschte Eigenschaft in R vorliegt.

Reflexive Hülle R^{refl}:

Beispiele:

- Die reflexive Hülle von $<$ ist $\leq$.
- Die reflexive Hülle von $\leq$ ist $\leq$ selbst.
  Generell: Die reflexive Hülle einer reflexiven Relation ist die Relation selbst.
- Die reflexive Hülle der Relation "x liebt y" führt zu einer Population von Narzissten.

Transitive Hülle R^+:

Beispiele:

- Sei $R = \{(x, y) \mid y = x + 1 \wedge x, y \in \mathbb{N}\}$ die Nachfolgerelation auf den natürlichen Zahlen. Dann ist R^+ die "kleiner als"-Relation auf $\mathbb{N}$.
- Die transitive Hülle der Relation "x kennt y" verbindet (vermutlich) alle Menschen auf der Welt direkt.
- Die transitive Hülle von "x ist mit y durch eine Straße verbunden" verbindet praktisch alle Orte eines Kontinents oder einer Insel miteinander.

Mathematische Grundlagen: Funktionentheorie

Eine Relation R: M1 $\Rightarrow$ M2 ist eine (totale) **Funktion** (Abbildung) gdw.

- jedes Element aus dem Definitionsbereich mit genau einem Element aus dem Wertebereich in der Relation R. steht;
- der Definitionsbereich von R identisch ist mit M1.

- Eine Funktion von der Menge M1 in die Menge M2 ist eine Relation derart, dass jedem Element aus M1 ein eindeutig bestimmtes Element aus M2 zugeordnet wird.
- Eine Teilmenge R eines Cartesischen Produkts M1 $\times$ M2 ist also eine Funktion gdw. jedes Element aus M1 genau ein Mal als erstes Element in den geordneten Paaren der Menge R auftritt.

Mathematische Grundlagen: Funktionentheorie

Eine Relation R: M1 $\Rightarrow$ M2 ist eine (totale) **Funktion** (Abbildung) gdw.

- – jedes Element aus dem Definitionsbereich mit genau einem Element aus dem Wertebereich in der Relation R. steht;
- – der Definitionsbereich von R identisch ist mit M1.

➢ Bei **partiellen Funktionen** ist jedem Element aus dem Definitionsbereich höchstens ein Element aus dem Wertebereich zugeordnet.
  - d.h. es kann im Definitionsbereich Objekte geben, denen keine Elemente aus dem Wertebereich zugeordnet sind.

Mathematische Grundlagen: Funktionentheorie

Beispiele: M1 = {a, b, c}
M2 = {1, 2, 3, 4}

Die folgenden Relationen von M1 nach M2 sind Funktionen:

- – P = {<a, 1>, <b, 2>, <c, 3>}
- – Q = {<a, 3>, <b, 4>, <c, 1>}
- – R = {<a, 3>, <b, 2>, <c, 2>}

Die folgenden Relationen von M1 nach M2 sind keine totalen Funktionen:

- – S = {<a, 1>, <b, 2>}
  ► Def.-Bereich ≠ M1 (S ist partielle Funktion)
- – T = {<a, 2>, <b, 3>, <a, 3>, <c, 1>}
  ► a sind 2 Elemente aus M2 zugeordnet
- – V = {<a, 2>, <a, 3>, <b, 4>}
  ► beide Bedingungen verletzt

Surjektive, injektive, bijektive Funktionen

$f: M \rightarrow N$ heißt

- *surjektiv*, wenn gilt:

$$\forall n \in N \, \exists m \in M : f(m) = n$$

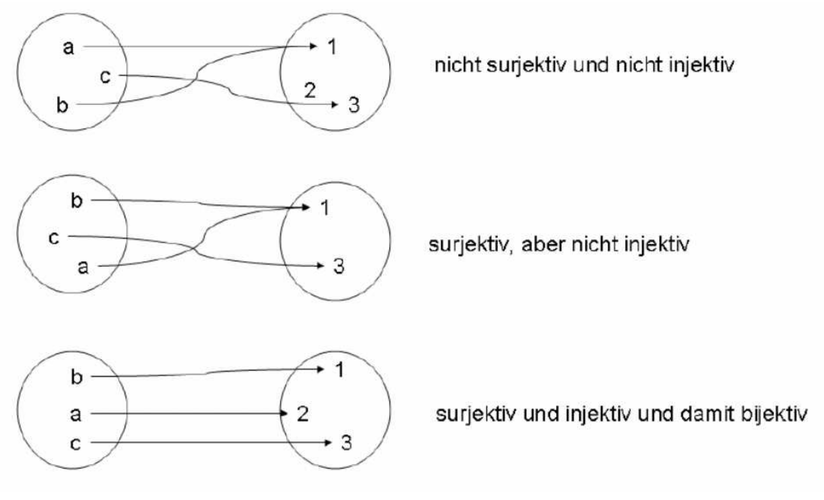
- *injektiv*, wenn gilt:

$$\forall m_1 \in M \, \forall m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$$

- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

  - bijektive Funktionen werden auch *eineindeutig* genannt

Surjektive, injektive, bijektive Funktionen



Mathematische Grundlagen: Funktionentheorie

Injektive Funktionen:	*y ist Staatsoberhaupt des Landes x*
(One-to-one-Funktionen)	*x hat y als Staatsoberhaupt*
Surjektive Funktionen:	*y ist die Mutter von x*
(Many-to-one-Funktionen)	*x hat y als Mutter*

Mathematische Grundlagen: Funktionentheorie

Charakteristische Funktion:

eine Funktion, die den Elementen einer Menge A den Wert 1 zuordnet und den Objekten aus U, die nicht Elemente von A sind, den Wert 0 zuordnet

– Beispiel:

WEIBLICH:	hans	⇒	0
	maria	⇒	1
	anna	⇒	1
	peter	⇒	0
	...	...	

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg